21 febbraio 2011 Prova scritta di **MATEMATICA II** per **Ing. Informatica** e per **Ing. Informatica e delle Telecomunicazioni** (prof. G.Russo)

1) Data la funzione $f(x,y) = x \log[x(xy+1)]$

a) descriverne analiticamente, geometricamente e topologicamente il dominio naturale **E** (4 pti) ;

b) calcolarne il limite nei punti di $\boldsymbol{FE}$. $(5\ pti)$

2) Usando una formula di Green calcolare $\iint_D \frac{|x|}{y}\,dx\,dy$, con **D** il dominio piano limitato compreso tra le curve $\boldsymbol{C_1}$ $y+1=-x^2$ e $\boldsymbol{C_2}$ y+3 = x^2 . (5 pti) *(gli studenti degli anni precedenti potevano non usare le formule di Green e usare il solito metodo di riduzione)*

3) Risolvere il seguente problema di Cauchy (4 pti) indicando il dominio **I** della soluzione (2 pti)

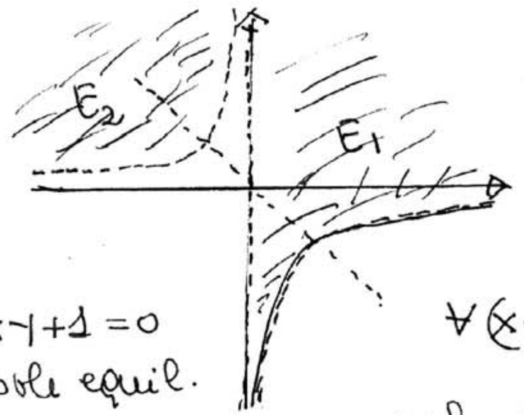
$$\begin{cases} y' = \frac{2\sin x\cos x}{4(\sin x)^2-1}(y+3) \\ y(3\pi) = 1 \end{cases} .$$

4) Data la serie $\sum_{n=0}^{n=+\infty} 4^n \frac{(z+3i)^{2n+1}}{2n+1}$ a) determinarne il campo di convergenza **E** motivando pienamente il risultato (4 pti) ; b) stabilirne il carattere in z = $-\frac{5}{2}$i (2 pti) .

4) Determinare gli estremanti della funzione $f(x,y) = \log(xy+1)$ ristretta al dominio piano D $=[-1,1] \times \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ (4 pti) .

21 febbraio 2011 Risoluzione

1) $E = \underbrace{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \begin{cases} x>0 \\ xy+1>0 \end{cases}\right\}}_{E_1} \cup \underbrace{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \begin{cases} x<0 \\ xy+1<0 \end{cases}\right\}}_{E_2}$



E è l'insieme aperto, non connesso, non limitato tratteggiato in figura.

Γ) $xy+1=0$ iperbole equil.

$\forall (x,y)\in E \quad x\log[x(xy+1)] =$

$= x\log|x| + x\log|xy+1|$

$\partial E = \{(0,y),\ y\in\mathbb{R}\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy+1=0\}$

$\lim\limits_{x\to 0} x\log|x| = 0$ limite notevole; $\lim\limits_{(0,y_0)} x\log|xy+1| = 0$

$\lim\limits_{(x_0,y_0)} x\log|x| = x_0\log|x_0|$; $\lim\limits_{(x_0,y_0)} x\log(xy+1) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x_0<0 \\ -\infty & \text{se } x_0>0 \end{cases}$

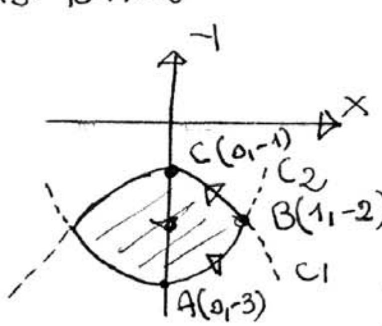
con $x_0\cdot y_0+1=0$ $\qquad$ con $x_0\cdot y_0+1=0$

Pertanto $\lim\limits_{(0,y_0)} f(x,y) = 0$ e

$$\lim_{\substack{(x_0,y_0) \\ \text{con } x_0\cdot y_0+1=0}} f(x,y) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x_0<0 \\ -\infty & \text{se } x_0>0. \end{cases}$$

#

2)



C_1 e C_2 parabole

Poiché D è simmetrico rispetto all'asse y e $f(-x,y) = f(x,y)$

$$I = \int_D \frac{|x|}{y}\,dx\,dy = 2\int_{D_1} \frac{x}{y}\,dx\,dy$$

con $D_1 = \{(x,y)\in D : x\geq 0\}$

La funzione $g(x,y) = \frac{1}{2}\frac{x^2}{y}$ è tale che

$g'_x = f(x,y)$. Usando la prima formula di Green

• $I = 2\int_{D_1} \frac{x}{y}\,dx\,dy = \int_{+\mathcal{F}D} \frac{x^2}{y}\,dy$

$+\mathcal{F}D = \widehat{AB} \cup \widehat{BC} \cup \overline{CA}$. Poiché $g/\overline{CA} \equiv 0$ $\int_{\overline{CA}} g\,dy = 0$

$$I_1 = \int_{\widehat{AB}} \frac{x^2}{y}\,dy = \int_{-3}^{-2} \frac{y+3}{y}\,dy = \left[y + 3\log|y|\right]_{-3}^{-2} =$$

$$= -2 + 3\log 2 + 3 - 3\log 3 = 1 + 3\log 2 - 3\log 3\,;$$

$$I_2 = \int_{\widehat{BC}} \frac{x^2}{y}\,dy = \int_{-2}^{-1} \frac{-1-y}{y}\,dy = -\left[\log|y| + y\right]_{-2}^{-1} =$$

$$= -\left(-1 - \log 2 + 2\right) = -1 + \log 2$$

$$I = I_1 + I_2 = 4\log 2 - 3\log 3 = \log\frac{16}{27}.$$

#

3) I è il più grande intervallo contenente 3π e ove $\operatorname{sen} x \neq \pm\frac{1}{2}$; $I = \left[\pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi, \pi + \frac{\pi}{6} + 2\pi\right] = \left[\frac{17}{6}\pi, \frac{19}{6}\pi\right]$.

$$\int \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{4\operatorname{sen}^2 x - 1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{d(4\operatorname{sen}^2 x - 1)}{4\operatorname{sen}^2 x - 1} =$$

$$= \log\sqrt[4]{|4\operatorname{sen}^2 x - 1} + h$$

$t = y + 3 \qquad t' = y' \qquad t' = \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{4\operatorname{sen}^2 x - 1}\,t$ ②

$$t(x) = k\sqrt[4]{|4\operatorname{sen}^2 x - 1|} : I \to \mathbb{R} \qquad k \in \mathbb{R}$$

$y(x) = k\sqrt[4]{|4\,\mathrm{sen}^2 x - 1|} - 3 : I \to \mathbb{R}$ $\quad k\in\mathbb{R}$

integ. generale dell'eq. diff.

$y(3\pi) = k-3 = 1 \Rightarrow k=4$

$$y(x)=4\sqrt[4]{|4\,\mathrm{sen}^2x-1|}-3 : I\to\mathbb{R}$$

la soluzione del f.C.

#

4) E è il campo di convergenza anche della serie derivata $\sum_{n=0}^{+\infty} 4^n(z+3i)^{2n}$ che è la serie geometrica di ragione $[2(z+3i)]^2$ che converge $\iff$ $[2|z+3i|]^2<1 \iff |z+3i|<\frac{1}{2}$. Pertanto

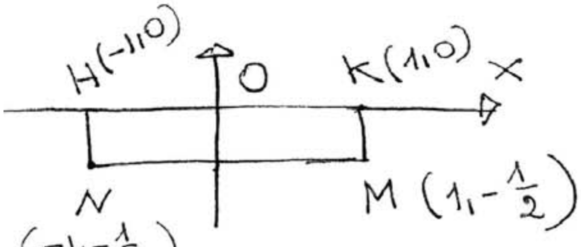
$E=\{z\in\mathbb{C} : |z+3i|<\frac{1}{2}\} = \mathring{D}(-3i, \frac{1}{2})$.

Se $z=-\frac{5}{2} i$ la serie data diventa

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 4^n \left(\frac{i}{2}\right)^{2n+1}\cdot\frac{1}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{2\cdot 4^n}(-1)^n\cdot i\,\frac{1}{2n+1};$$

esso ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2(2n+1)}$ che converge per il teorema di Leibnitz.

#



$f(x,y)=\log(xy+1)$ continua

D compatto

$\forall (x,y)\in\mathring{D}$ $\exists f'_x$ e f'_y e inoltre $f'_x \frac{y}{xy+1} \neq 0$

$\Rightarrow$ in $\mathring{T}$ non ci sono estremanti.

$f/_{HK} \equiv 0$; inoltre $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in T : x < 0$

$f(x,y) \leq 0 \quad \forall (x,y) \in T : x > 0$.

Pertanto $(x,0)$ con $-1 \leq x < 0$ sono punti di min relativo e non assoluto;

$(x,0)$ con $0 < x \leq 1$ sono punti di max relat. e non assoluto ; $(0,0)$ non è estremante.

$f/_{\overline{HN}} = h(y) = f(-1, y) = \log(1-y)$ s. decres. in $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$;

$f/_{\overline{KM}} = f(1,y) = g(y) = \log(1+y)$ s. crescente in $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$

$f/_{\overline{NM}} = f\left(x, -\frac{1}{2}\right) = \ell(x) = \log\left(1 - \frac{1}{2}x\right)$ s. decres. in $[-1, 1]$. Pertanto $N\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ è il pto di max ass.

e $M\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ quello di min. ass. Non ci sono altri estremanti.

#